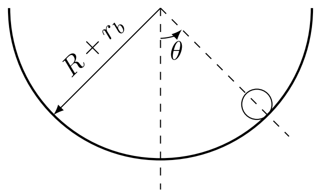
M3 : Mécanique en coordonnées cylindriques

Exercice 1 : Mouvement d'une bille

On considère le mouvement d'une bille de rayon r_b dans un demi-cercle de rayon $R + r_b$. La bille roule sans glisser.



1. Décrire qualitativement le mouvement de la bille.
2. Faire le bilan des forces, les faire figurer sur le schéma.
3. Donner l'expression de l'accélération.
4. En déduire l'équation du mouvement de la bille.
5. Quelle est la nature du mouvement aux petits angles ?

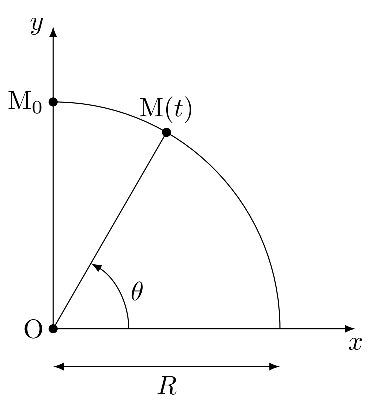
Exercice 2 : Force centrifuge

Un tube horizontal de longueur L tourne dans le plan horizontal à une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical z. On place une bille dans ce tube. La bille, de masse m, est assimilée à un point matériel, et est lâchée à une distance $r_0 < L/2$ de l'axe, sans vitesse radiale. On néglige les frottements, et on étudie le mouvement dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

1. Faire un schéma de la situation.
2. Faire le bilan des forces agissant sur la bille.
3. Exprimer l'accélération puis projeter la seconde loi de Newton dans le système de coordonnées.
4. Déterminer une équation différentielle régissant l'évolution de $r(t)$ et la résoudre.
5. Dessiner la trajectoire de la bille dans le tube.
6. Déterminer l'expression de la force exercée par le tube sur la bille en fonction du temps.

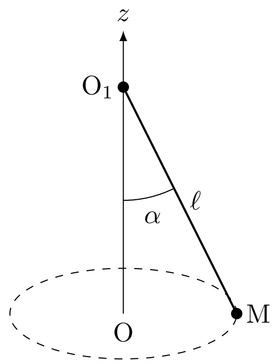
Exercice 3 : Piste circulaire

On considère le mouvement d'une bille sur une portion de cercle de centre O de rayon R. On suppose que le roulement se fait sans glissement (sans frottements). La position du point M est repérée par l'angle θ entre l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$. La bille part du sommet sans vitesse initiale.



1. Exprimer les vecteurs vitesses et accélération du point M en fonction de R et des dérivées successives de θ.
2. Par application du PFD, établir deux relations. Écrire l'une d'elles sous la forme $\ddot{\theta} = -k\cos\theta$, préciser l'expression de k.
3. Intégrer cette équation (en la multipliant par $\dot{\theta}$), en déduire l'expression de la vitesse en fonction de θ.
4. En déduire l'expression de la réaction normale au support en fonction de θ, m et g, puis l'angle θ_d qui marque le début du décollage.
5. Quelle est la vitesse v_d de la bille en θ_d ?
6. Quel est la nature de la trajectoire pendant la deuxième phase ?
7. Exprimer l'angle de décollage si la vitesse initiale est $v_0 \neq 0$.

Exercice 4 : Pendule en rotation

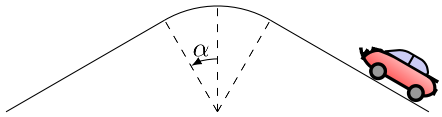


Un enfant fait tourner un pendule constitué d'une ficelle de longueur ℓ fixée en O_1 et d'un caillou de masse m de telle façon à ce que le caillou effectue un mouvement circulaire uniforme dans un plan (l'angle α reste constant par rapport à la verticale).

1. À l'aide d'un système de coordonnées bien choisi, trouver une relation entre α, ω, ℓ et la norme du champ de pesanteur g. Interpréter le cas où ω devient très grande.
2. Montrer qu'il existe une valeur de ω minimale pour que α existe.

Exercice 5 : Décollage d'une voiture sur une bosse

Une automobile, assimilée à un point matériel, circule à une vitesse v uniforme sur une route au profil accidenté. Elle franchit une bosse, modélisée par un arc de cercle de rayon R (entre les angles $-\alpha$ et α par rapport à la verticale).



À quelle condition sur la vitesse garde-t-elle le contact avec le sol ? On donne $\alpha = 10°$ et $R = 5$ m.

Exercice 6 : Masse du Soleil

La Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle de rayon $R = 149{,}6 \times 10^6$ km. La constante de gravitation universelle est $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I.. Déterminer la masse du Soleil.