Interrogation de cours n°12

9 janvier 2025

NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Exprimer les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. En déduire, à partir de l'expression du vecteur vitesse (admise), le vecteur accélération en coordonnées polaires.

On a $\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y}\\ &= -\dot\theta\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \dot\theta\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\\ &= \dot\theta\left[-\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

On a $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\ \overrightarrow{u_y}$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y}\\ &= -\dot\theta\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} - \dot\theta\sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\\ &= -\dot\theta\left[\cos(\theta)\ \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{u_y}\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\overrightarrow{u_r}}$$

En utilisant $\vec{v} = \dot r\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\overrightarrow{u_\theta}$:

$$\vec{a} = \ddot r\,\overrightarrow{u_r} + \dot r\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot\theta\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \ddot r\,\overrightarrow{u_r} + \dot r\dot\theta\overrightarrow{u_\theta} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot\theta^2\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

Interrogation de cours n°12

9 janvier 2025

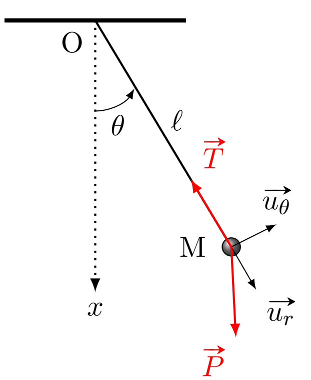
NOM :

Calculatrices interdites. Répondez de manière complète mais brève.

1. Obtenir l'équation du mouvement du pendule simple. On note ℓ la longueur du pendule, m la masse et g l'accélération de la pesanteur. On pourra admettre l'expression de l'accélération.

On étudie le mouvement d'une masse, assimilée à un point matériel M, suspendue à un fil, dans le référentiel de la salle de classe. On fixe l'origine au point d'accroche du fil et on se dote de la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ centrée sur O, θ étant l'angle par rapport à la verticale (sens trignométrique). Sur la masse s'exerce son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$



Le mouvement est circulaire (non uniforme) de rayon ℓ donc $\vec{a} = -\ell\dot\theta^2\overrightarrow{u_r} + \ell\ddot\theta\overrightarrow{u_\theta}$. On projette le PFD sur les coordonnées. On obtient

$$-\ell\dot\theta^2 = mg\cos\theta - T \qquad \text{et} \qquad m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta$$

On ne peut rien faire de la première équation, T étant une inconnue. La seconde est l'équation du pendule simple :

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2. Définir la tension d'un fil.

La tension d'un fil $\overrightarrow{T}$ est la force exercée par un fil sur un objet suspendu au fil. Si le fil est **détendu**, cette force est **nulle**. Si le fil est **tendu**, la force $\overrightarrow{T}$ est colinéaire au fil et dirigée vers le point d'accroche O.

3. Donner les vecteurs position et vitesse en coordonnées cylindriques.

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

4. Définir un mouvement circulaire uniforme. Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération dans ce cas.

Un mouvement circulaire uniforme est un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante. Dans ce cas :

- ▷ Le vecteur vitesse est selon $\overrightarrow{e_\theta}$ et sa norme est constante et égale à $R\omega$.
- ▷ Le vecteur accélération pointe vers le centre et sa norme est constante et égale à $R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

---

2. Donner l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos\left(\theta(t)\right)\,\overrightarrow{u_x} + \sin\left(\theta(t)\right)\,\overrightarrow{u_y}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\left(\theta(t)\right)\,\overrightarrow{u_x} + \cos\left(\theta(t)\right)\,\overrightarrow{u_y}}$$

4. Définir un mouvement circulaire. Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération dans ce cas.

Un mouvement circulaire est un mouvement à r et z constants. Dans ce cas :

- ▷ Le vecteur vitesse est selon $\overrightarrow{e_\theta}$ et sa norme est constante et égale à $R\omega$.
- ▷ Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{e_r} + R\dot{\omega}\,\overrightarrow{e_\theta}$$