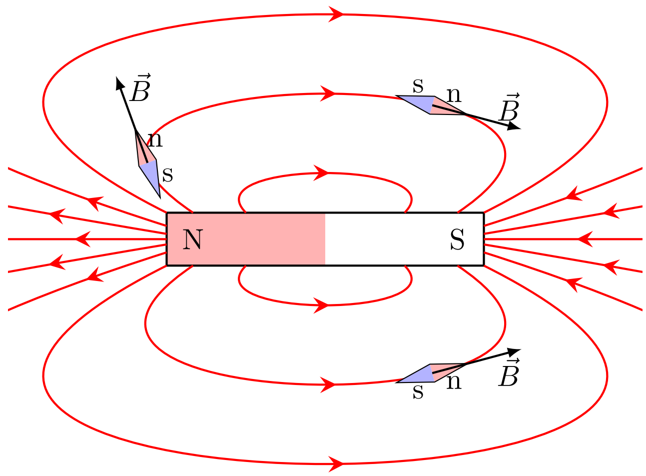
EM 3 — Actions mécaniques du champ magnétique

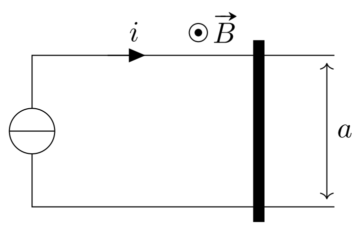
1 Observations expérimentales

Aimant. On a vu aux chapitres précédents qu'une petite aiguille aimantée s'alignait sur la direction du champ magnétique.



On peut donc supposer qu'elle subit un **couple** de forces qui cause sa mise en rotation si elle n'est pas alignée sur le champ $\vec{B}$.

Expérience des rails de Laplace. On réalise l'expérience suivante :



On utilise un aimant en U pour créer un champ magnétique uniforme sur une assez grande partie du barreau mobile.

— On constate que lorsque l'on met un courant, le barreau se met en mouvement vers la gauche.
— Si l'on retourne l'aimant ou que l'on inverse le sens du courant, le mouvement a lieu dans l'autre sens.
— Si l'on met $\vec{B}$ dans le sens de la tige mobile, il n'y a pas de mouvement.

Ces observations suggère l'existence d'une **force** dépendant du courant et du champ magnétique, ainsi que de la direction du barreau.

2 La force de Laplace

2.1 Densité linéique de la force de Laplace

Dans un fil électrique parcouru par un courant, les électrons de conduction sont en mouvement. Placés dans un champ magnétique, ils subissent la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$: c'est l'origine de la force de Laplace. Établissons son expression en fonction de l'intensité parcourant le circuit.

Hypothèses de calcul :

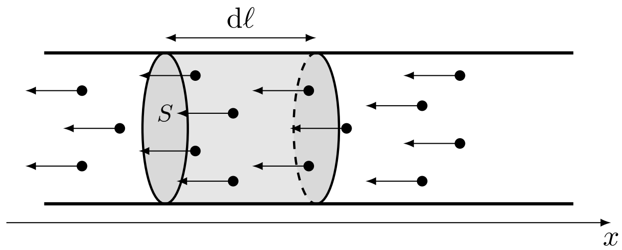
— on suppose que les électrons sont animés d'une même vitesse $\vec{v} = -v\vec{u_x}$, où $\vec{u_x}$ désigne la direction de l'intensité dans le fil. Cette hypothèse a pour but de simplifier le calcul : dans la situation réelle, v représente la vitesse moyenne des électrons ;

— le nombre d'électrons par unité de volume n (en m^{-3}) est uniforme ;

— on considère un fil de section transversale S constante.

Expression de l'intensité du courant : Pendant un intervalle $\mathrm{d}t$, les électrons situés dans un cyclindre de longueur $v\mathrm{d}t$ en amont de S vont passer à travers la section S. Dans ce cylindre, il y a $\mathrm{d}N = n \times Sv\mathrm{d}t$ électrons, soit une charge $|\mathrm{d}q| = e\mathrm{d}N = neSv\mathrm{d}t$. L'intensité du courant est donc :

$$i = \left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right| = neSv$$



Expression de la force subie par une portion de fil. Considérons une portion de longueur $\mathrm{d}\ell$ de fil. Elle contient $n \times S\mathrm{d}\ell$ électrons. Chaque électron subit la force de Lorentz $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$. La force subie par la portion de fil est donc :

$$\mathrm{d}\vec{F} = nS\mathrm{d}\ell \times \left(-e\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Soit :

$$\mathrm{d}\vec{F} = neSv\,(\mathrm{d}\ell\vec{u_x}) \wedge \vec{B}$$

On note $\vec{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell\vec{u_x}$ le vecteur élément de déplacement fléché dans le sens de i.

Définition. La **force de Laplace** subie par une portion de fil de longueur $\mathrm{d}\ell$ est :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\mathsf{Laplace}}} = i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$$

Le vecteur $\vec{\mathrm{d}\ell}$ est orienté dans le sens du courant.

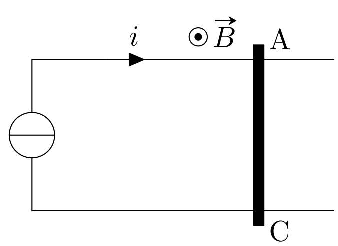
2.2 Expression intégrale de la force de Laplace

Si le champ magnétique est homogène sur un fil rectiligne AC (schéma), alors la force de Laplace :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{Laplace}}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} i\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}$$

s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{Laplace}}} = i\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \vec{\mathrm{d}\ell}\right) \wedge \vec{B}$$



or $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ d'où la propriété suivante :

Définition. La **force de Laplace** qui s'exerce sur une barre conductrice AC traversée par un courant i et placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ vaut

$$\overrightarrow{F_{\text{Laplace}}} = i\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{B}$$

où le courant i est orienté selon le sens du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Remarque.

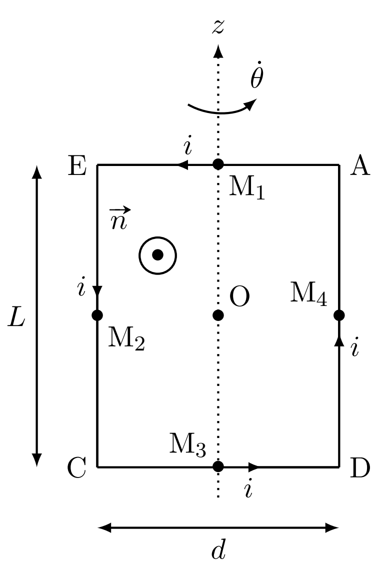
1. On peut orienter la force selon la règle des trois doigts de la main droite. Le pouce désigne la force (« le pouce pousse »), l'**in**dex l'**in**tensité et le **ma**jeur le champ **ma**gnétique.
2. Cette expression permet d'obtenir la dimension de B en fonction des dimensions fondamentales :
$$B = \frac{F}{\ell i} = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L} \cdot \mathrm{I}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{I}^{-1}$$
3. L'ordre de grandeur de cette force pour un fil de $5\ \mathrm{cm}$ dans un champ de $0{,}1\ \mathrm{T}$ parcouru par une intensité de $1\ \mathrm{A}$ est :
$$\left\|\overrightarrow{F_{\text{Laplace}}}\right\| = i\ell B = 5\ \mathrm{mN}$$
4. La puissance de la force de Laplace correspondante est :
$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \left(i\overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$

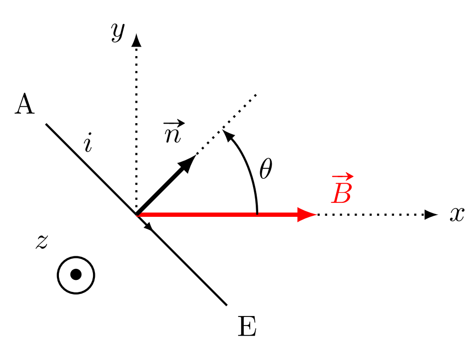
3 Le couple des actions de Laplace

Nous n'avons vu ici que des forces mais une aiguille aimantée tourne dans un champ magnétique, elle subit donc un moment. Comment le quantifier ?

3.1 Spire rectangulaire plongée dans un champ constant

Nous traitons le cas d'une spire rectangulaire dans un champ constant, qui nous permet d'avoir le couple des actions de Laplace.





Vue de dessus

— On considère un cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant i. Ce cadre peut tourner autour de l'axe (Oz).

— On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{u_x}$. On note θ l'angle entre $\vec{B}$ et la normale au cadre orientée dans le sens de i que l'on notera $\vec{n}$.

Résultante des forces Il s'agit d'additionner les différentes forces de Laplace subies par chacun des côté de la spire rectangulaire. Sur le côté AE, par exemple :

$$\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} = i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B}$$

La résultante des forces est donc :

$$\begin{aligned}\sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} &= i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{CD}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{DA}} \wedge \vec{B} \\ &= i\left(\overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{EC}} + \overrightarrow{\text{CD}} + \overrightarrow{\text{DA}}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} = \vec{0}}$$

Remarque. Si le champ magnétique est **homogène** sur un circuit fermé, alors la résultante des forces de Laplace est nulle. En effet, c'est l'intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\left(\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Couple des forces On peut exprimer la force agissant sur le côté $\overrightarrow{\text{AE}}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} &= i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B} \\ &= i\left(-d\cos\theta\,\vec{u_y} + d\sin\theta\,\vec{u_x}\right) \wedge B\,\vec{u_x} \\ &= idB\cos\theta\,\vec{u_z}\end{aligned}$$

Néanmoins, ceci est inutile car la force s'exercant de façon constante tout le long de la spire, son point d'application est M$_1$, qui est un point de l'axe de rotation. Son moment est donc nul.

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}}\right) = 0}$$

Sur le côté $\overrightarrow{\text{EC}}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}} &= i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B} \\ &= i\left(-L\,\vec{u_z}\right) \wedge B\,\vec{u_x} = -iLB\,\vec{u_y}\end{aligned}$$

Le point d'application est M$_2$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) &= \left(\overrightarrow{\text{OM}_2} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) \cdot \vec{u_z} \\ &= \left(\left(-\frac{d}{2}\cos\theta\,\vec{u_y} + \frac{d}{2}\sin\theta\,\vec{u_x}\right) \wedge -iLB\,\vec{u_y}\right) \cdot \vec{u_z}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) = -iLB\frac{d}{2}\sin\theta}$$

La force agissant sur le côté $\overrightarrow{\text{CD}}$ s'applique en M$_3$, qui est sur l'axe de rotation donc :

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,CD}}}\right) = 0}$$

Sur le côté $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$:

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_4} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}_4} = -\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$ et $\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}} = -\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}$ (le courant va vers le haut) :

$$\boxed{\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}\right) = \mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) = -iLB\frac{d}{2}\sin\theta}$$

En sommant tous ces moments, on trouve :

$$\mathcal{M}_z = -idLB\sin\theta$$

On introduit le moment magnétique de la spire :

$$\overrightarrow{m} = iS\overrightarrow{n}$$

Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B} &= iS\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}\right) \wedge B\,\overrightarrow{u_x} \\ &= -iSB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ &= -iLdB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

Le **moment des forces des Laplace** par rapport à un axe $\overrightarrow{u_z}$ sur un moment magnétique $\overrightarrow{m}$ plongé dans un champ uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B}$ vaut

$$\mathcal{M}_z = \left(\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

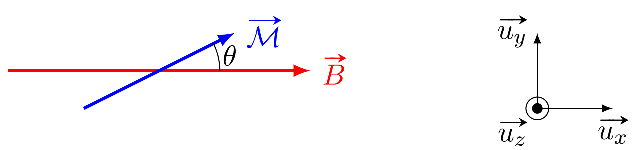
3.2 Effet sur un aimant

Par analogie avec la spire, on peut dire que un champ magnétique génère un couple de forces de moment :

$$\mathcal{M}_z = \left(\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

La dynamique de la rotation de l'aimant est équivalente à celle du pendule pesant.

Considérons un aimant, repéré par un angle θ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_x}$:



On a :

$$\overrightarrow{m} = m\cos\theta\overrightarrow{u_x} + m\sin\theta\overrightarrow{u_y}$$

Ainsi :

$$\left(\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -mB\sin\theta$$

El l'absence de frottements, en notant J le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à son axe de rotation :

$$J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z = -mB\sin\theta$$

Ou encore :

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\sin\theta = 0$$

Ce qui est l'équation du pendule. Ainsi :

— La position $\theta = 0$ correspond à une position d'équilibre **stable** de l'aimant. Cela correspond à un moment magnétique aligné sur le champ magnétique.

— La position $\theta = \pi$ correspond à une position d'équilibre instable de l'aimant. Cela correspond à un moment magnétique opposé au champ magnétique.

Du fait des petites vibrations (qui rendent la position $\theta = \pi$ non durable) et des frottements, un aimant tend à s'aligner sur le champ magnétique.

Au voisinage de sa position d'équilibre, on peut écrire $\sin\theta \approx \theta$ ainsi :

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\theta = 0$$

Cette équation est celle de l'oscillateur harmonique, la période propre correspondante est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}}$$

Elle est d'autant plus petite (l'oscillation est brève) que B est grand.